EXERCICE 27

A

$n \subset \mathbb{N}^*$

$f_n(x) = (x-1)^n . \text{Ln}x$

1) $\varphi_n(x) = n.\text{Ln}x + 1 - \frac{1}{x}$

a) $\varphi'_n(x) = \frac{n}{x} + \frac{1}{x^2} > 0$

x	0	$+\infty$
$\varphi'_n(x)$	+	
$\varphi_n(x)$	$-\infty$ ↗	$+\infty$

b) $\varphi_n(1) = 0$

x	0	1	$+\infty$
$\varphi_n(x)$	-	0	+

2) a) pour $n = 1$

$f_1(x) = (x-1).\text{Ln}x$

$f_1'(x) = \text{Ln}x + 1 - \frac{1}{x} = \varphi_1(x)$

x	0	1	$+\infty$
$f_1'(x)$	-	0	+
$f_1(x)$	$+\infty$ ↘	0	↗ $+\infty$

Pour $n \geq 2$

$f_n'(x) = n(x-1)^{n-1}.\text{Ln}x + \frac{(x-1)^n}{x}$

$f_n'(x) = (x-1)^{n-1} . \varphi_n(x)$

1ier cas (n : impair)

Le signe de $f_n'(x)$ est celui de $\varphi_n(x)$

x	0	1	$+\infty$
$f_n'(x)$	-	0	+
$f_n(x)$	$+\infty$ ↘	0	↗ $+\infty$

2eme cas (n : pair)

Le signe de $f_n'(x)$ est celui de $(x-1).\varphi_n(x)$

x	0	1	$+\infty$
$f_n'(x)$	+	0	+
$f_n(x)$	$-\infty$ ↗		↗ $+\infty$

b) $f_2(x) - f_1(x) = (x-1)^2.\text{Ln}x - (x-1).\text{Ln}x$

$= (x-1)(x-2).\text{Ln}x$

x	0	1	2	$+\infty$
$f_2(x) - f_1(x)$	-	0	- 0	+
P.R	C_1/C_2	C_1/C_2 (1,0)	C_1/C_2 (2, Ln2)	C_2/C_1

$\lim_{x \to +\infty} \frac{f_1(x)}{x} = \lim_{x \to +\infty} (1 - \frac{1}{x}) \text{Ln}'x$

$= +\infty$

$\lim_{x \to +\infty} \frac{f_2(x)}{x} =$

$= \lim_{x \to +\infty} (\frac{x^2 - 2x + 1}{x}) \text{Ln}x = +\infty$

Branche infinie parabolique de direction celle de $(O, \vec{j})$.

Qarray.tn - Aqra Blech - Qarray.tn